位相速度と群速度

位相速度 phase velocity：正弦波の速さ

正弦波 $y = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ は，$\frac{2\pi}{\lambda} = k$ (rad/m) とおくと，$y = A\sin(\omega t - kx)$ と表せる。

この正弦波の位相を θ とおくと，$\theta = \omega t - kx$

ここで，位相 θ を任意にとり，これを θ_i とすると，$\theta_i = \omega t - kx$ より，$x = \frac{1}{k}(\omega t - \theta_i)$

両辺を t で微分することにより，位相が θ_i の位置 x の進む速さ $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$ が得られる。

これは，位相が一定ならば，位相 θ の値によらず，

その位相と対応する位置 x の進む速さは $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$ で一定であることを意味する。

つまり，山の位相と対応する位置 x であっても谷の位相と対応する位置 x であっても

位置 x が移動する速さは $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$ で一定であるということを意味し，

もっと簡単に言えば，山の x であろうと谷の x であろうと

x の速さは $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$ であるという意味である。

要するに，$\frac{\omega}{k}$ とは，$\frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{2\pi f\lambda}{2\pi} = f\lambda$ より，

すでに学習済みの正弦波が伝わる速さのことである。

この $\frac{\omega}{k}$ を位相速度（phase velocity）という。

まとめると，位相速度 $v_{\mathrm{p}} = \frac{\omega}{k} = f\omega$

群速度 group velocity：波のグループ（波束）の速さ

異なる 2 つの正弦波を

$y_1 = A\sin(\omega_1 t - k_1 x)$ ・・・①

$y_2 = A\sin(\omega_2 t - k_2 x)$ ・・・②

とすると，

これら 2 つの波の合成波の式は

$$y_1 + y_2 = 2A\cos\left\{\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right\}\sin\left\{\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right\} \quad ・・・③$$

ここで，

$\cos\left\{\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right\}$ と $\sin\left\{\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right\}$ を比較すると，

$|\omega_1 - \omega_2| < \omega_1 + \omega_2$，$|k_1 - k_2| < k_1 + k_2$ より，

周期は $\frac{4\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} > \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$，波長は $\frac{4\pi}{|k_1 - k_2|} > \frac{4\pi}{k_1 + k_2}$ となり，

周期も波長も

$\cos\left\{\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right\}$ の方が $\sin\left\{\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right\}$ より長いことがわかる。

つまり，前者の方が後者より穏やかな波動であることがわかる。

そこで，$2A\cos\left\{\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right\}$ ・・・④ とし，

これを仮に振幅波と呼ぶことにする。

視覚的に理解するため，①～④をグラフにして表したのが次ページの図である。

合成波は波の一群（波束）が繰り返された波形をしており，

振幅波はその包絡線になっている。

この振幅波（波束）の移動する速さを群速度 group velocity という。

$y_1 + y_2 = 2A\cos\left\{\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right\}\sin\left\{\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right\}$ の群速度は，

$\cos\left\{\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right\}$ の項より，$v_{\mathrm{g}} = \left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}\right|$ である。

波束の長さ

t を固定すれば波形がわかる。したがって，$t=0$ を代入するのが簡単でよい。

すると，$y_1+y_2=2A\cos\left(-\dfrac{k_1-k_2}{2}x\right)\sin\left(-\dfrac{k_1+k_2}{2}x\right)$

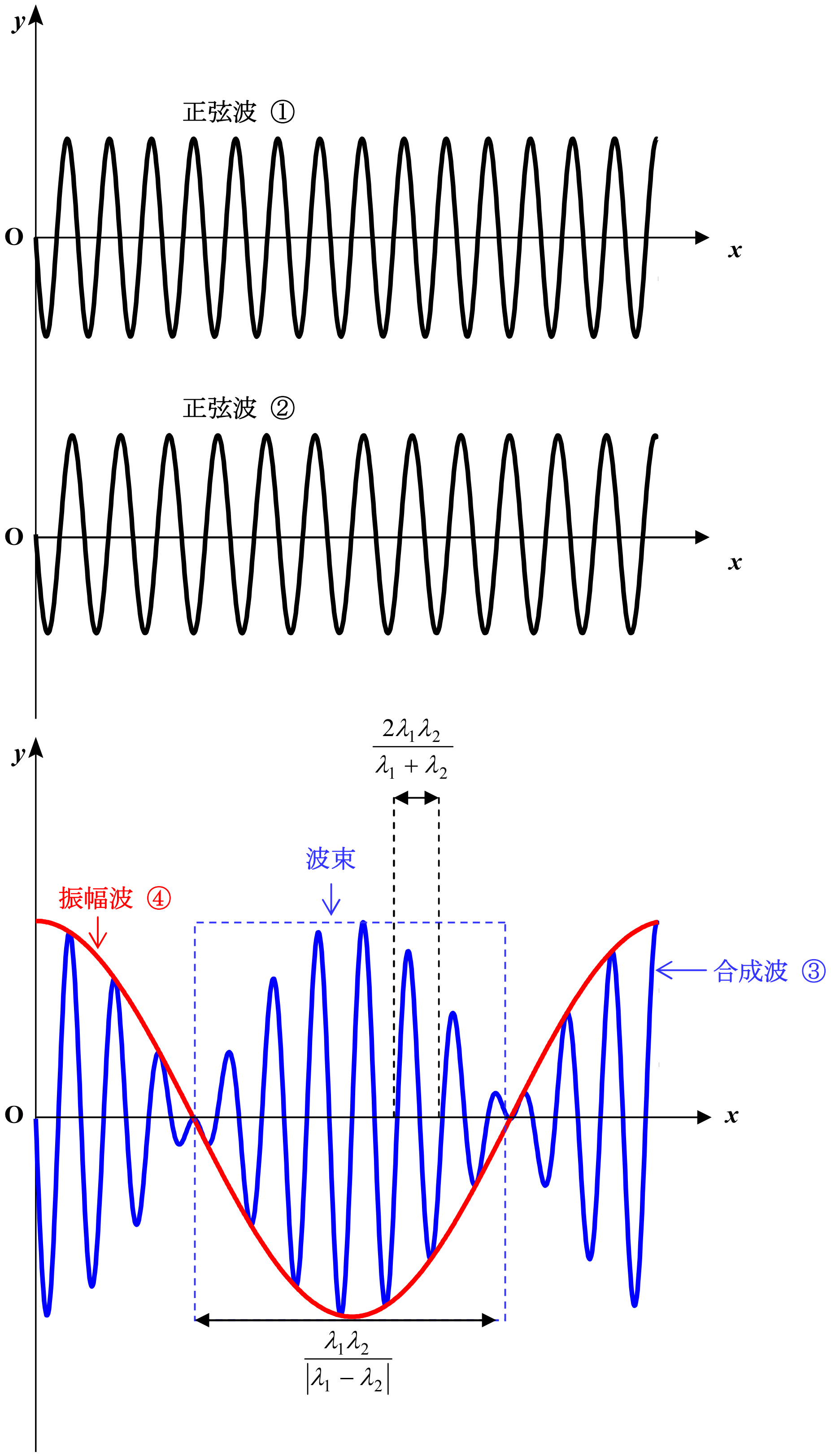
$k_1=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}$, $k_2=\dfrac{2\pi}{\lambda_2}$ より，$\dfrac{k_1-k_2}{2}=2\pi\cdot\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_1\lambda_2}$, $\dfrac{k_1+k_2}{2}=2\pi\cdot\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\lambda_1\lambda_2}$ だから，

$$
\begin{aligned}
y_1+y_2&=2A\cos\left(-2\pi\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_1\lambda_2}x\right)\sin\left(-2\pi\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\lambda_1\lambda_2}x\right)\\
&=2A\cos\left(2\pi\cdot\frac{x}{\dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}}\right)\sin\left(-2\pi\cdot\frac{x}{\dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}\right)
\end{aligned}
$$

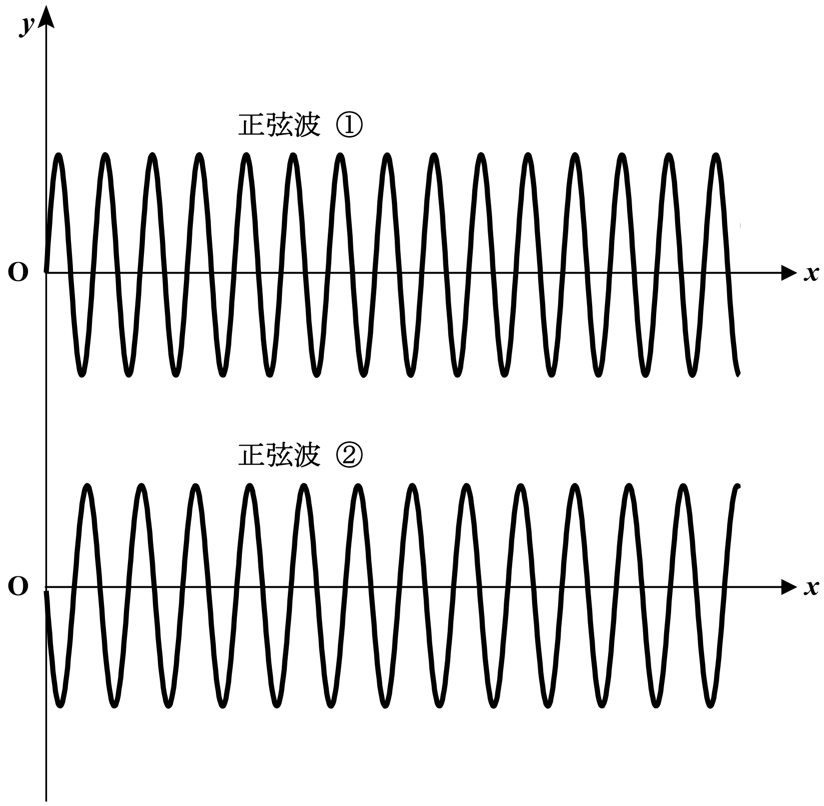
波形の式は一般に $y=a\sin\left(2\pi\cdot\dfrac{x}{\lambda}\right)$ で表されることと $\dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_1-\lambda_2|}>\dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ から，

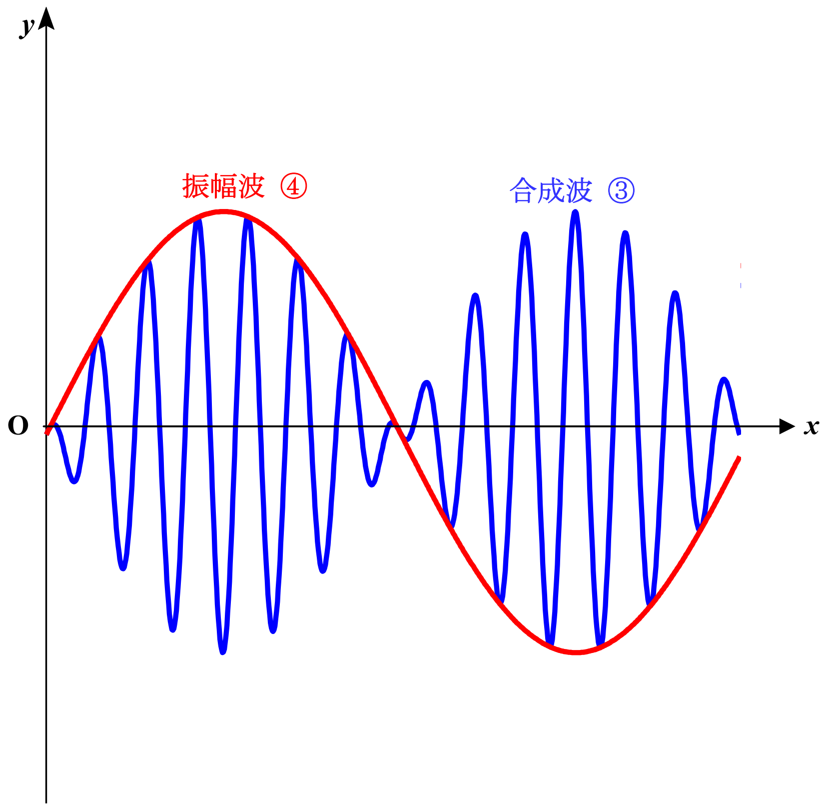
波束の長さは $\dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_1-\lambda_2|}\div 2=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_1-\lambda_2|}$ である。

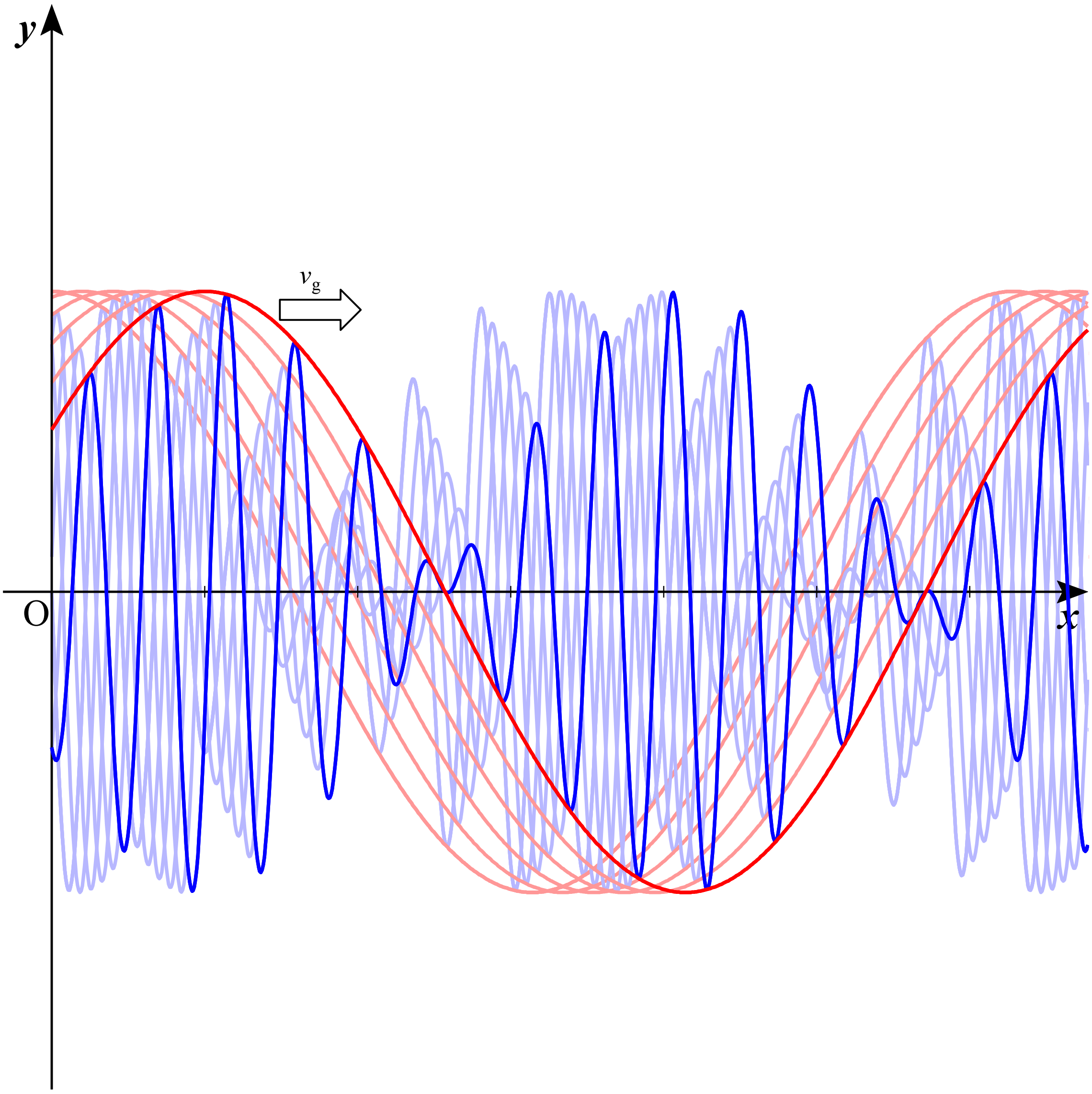
$t = 0$ のとき


y
正弦波 ①
O
x
正弦波 ②
O
x
y
$\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$
波束
振幅波 ④
合成波 ③
O
x
$\frac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_1-\lambda_2|}$

$t = t_1$（$t_1 > 0$）のとき






y
v_g
O
x